2017年　東大理系数学　第3問

(1)

補

点αと点βの垂直二等分線は
$|z-\alpha| = |z-\beta|$ で表せる。

垂直二等分する条件ではなく、二点からの距離が等しい軌跡

zが原点0と点αの垂直二等分線上にあるので、

$|z-0| = |z-\alpha|$

$\therefore |z| = |z-\alpha|$

$z = \dfrac{1}{w}$ なので、

$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w} - \alpha\right| \iff \dfrac{1}{|w|} = \left|\dfrac{1-\alpha w}{w}\right|$

両辺 $|w|$ をかけて、 $1 = |1-\alpha w|$

$|\alpha|\cdot\left|w - \dfrac{1}{\alpha}\right| = 1$

$|z-\alpha| = r$ なら α中心、半径rの円を描く

$|\alpha| \neq 0$ より　$\left|w - \dfrac{1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|}$

よって、求める円の中心は $\dfrac{1}{\alpha}$、半径は $\dfrac{1}{|\alpha|}$

(2) 1の3乗根を求める。

$x^3 = 1$ を解くと、

$x^3 - 1 = 0$

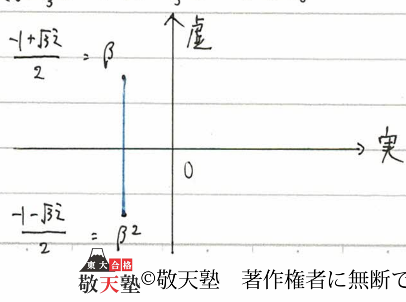
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ より

$x = 1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ が3つの解である。

よって $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である。

$\beta = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$ と変形できるので、

$\beta^2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$ となる。



点βと点β²を結ぶ線分は、原点0と点−1の垂直二等分線の一部なので、

(1)の結果に $\alpha = -1$ を代入すると、

$|w+1| = 1$ となり

wは −1中心、半径1の円の上を動く。

まずは、範囲を気にせず軌跡を求めた。

次に除外する場所を求める。

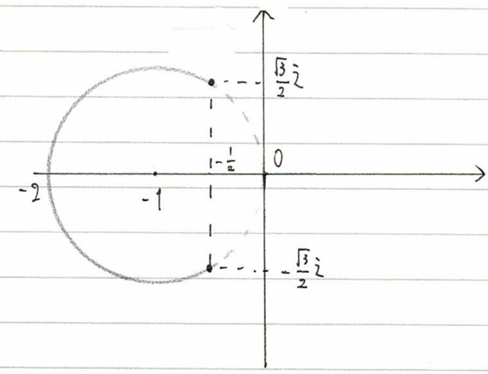
しかし、zが点βと点β²を結ぶ直線の全てではなく、一部しか動かないので、
wも、上の円の全てを動くとは限らない。

arg z を考えると、 $\frac{2}{3}\pi \leqq \arg z \leqq \frac{4}{3}\pi$ であり

$\arg w = \arg\dfrac{1}{z} = -\arg z$ なので、

$-\frac{4}{3}\pi \leqq \arg w \leqq -\frac{2}{3}\pi$

つまり、wは、−1中心、半径1の円のうち、
$-\frac{4}{3}\pi \leqq \arg w \leqq -\frac{2}{3}\pi$ を満たす部分なので、



図の実線部分である。（端点含む）